Je größer die Wurfanzahl, desto sicherer die Wette

Mit dem Spiel Wettkönig den Zufall auf lange Sicht erkunden

Stephan Hußmann und Susanne Prediger

Der verständige Umgang mit Wahrscheinlichkeiten ermöglicht, Voraussagen für relative Häufigkeiten zu machen. Dies lässt sich beispielsweise zum Wetten bei Spielen mit Zufallsgeräten gewinnbringend einsetzen. Diese Erfahrung wird mit dem Spiel „Wettkönig" ebenso erlebbar wie das Gesetz der großen Zahlen. Im Artikel wird gezeigt, wie Lernende der Klasse 6 spielen, wetten, sich Strategien überlegen und sich so eigenverantwortlich einem prognostischen Wahrscheinlichkeitskonzept nähern.

Mögen Sie lieber sichere oder unsichere Wetten? Und wetten Sie überhaupt, wenn Zufall im Spiel ist? Eine seltsame Frage, denn warum sollte sich jemand darauf einlassen, auf Unsicheres zu wetten? Oder lässt sich der Zufall so in den Griff bekommen, dass man wenigstens annähernd sicher wetten kann?
Wer eine gute stochastische Grundbildung genossen hat, weiß das empirische Gesetz der großen Zahlen als Garant dafür zu schätzen, dass in der Tat der Zufall bei großen Zahlen relativ sicher vorhersagbar wird. Wir wollen im Folgenden das Spiel „Wettkönig" vorstellen, welches diese Erfahrung in verschiedenen Varianten auch für Klasse 5 und 6 in kindgerechter, aber substanzieller Form ermöglicht. Es wurde im Rahmen des Projekts KOSIMA (s. Anmerkung am Ende des Beitrages) in vier Real- und Gesamtschulklassen des 5. und 6. Jahrgangs erprobt.
Das Spiel bietet einen Einstieg in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, bei dem nicht der *fertige Wahrscheinlichkeitsbegriff,* sondern das *Phänomen Zufall* (vgl. Moore 1990) mit seinen zentralen Tätigkeiten *Voraussagen – Experimentieren – Reflektieren* im Mittelpunkt steht. Es bereitet einen prognostischen Wahrscheinlichkeitsbegriff vor, also die Wahrscheinlichkeit als Schätzwert für relative Häufigkeiten bei großen Wurfanzahlen (Riemer 1991, vgl. Hußmann 2003 und Prediger 2005 zur Begründung der Vorgehensweise).

Das Gruppenspiel „Wetten auf Sieg"

Spielregeln

Bei dem Spiel „Wettkönig" (zu dessen Spielbrett ein Auszug in *Abb. 1* abgedruckt ist) starten vier Tiere zu einem Rennen. Anders als beim ähnlichen Kinderspiel „Schneckenrennen" werden die Spielfiguren nicht den Spielern zugeordnet. Vielmehr schließen die Kinder wie beim Trabrennen Wetten auf die Tiere ab.
Angetrieben werden die Tiere von einem zwanzigseitigen Farbwürfel mit ungleichmäßiger Farbverteilung: 7 × rot, 5 × gelb, 5 × grün und 3 × blau. Bei jedem Wurf rückt dasjenige Tier vor, dessen Farbe gewürfelt wurde.
In der ersten Spielvariante „Wetten auf Sieg" wetten die Spielenden darauf, wel-

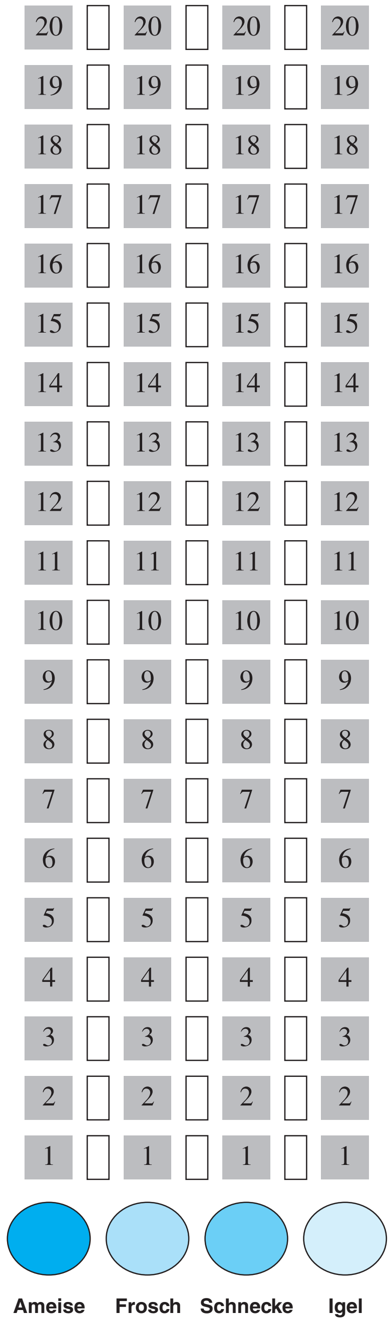

***Abb. 1:** Spielbrett Wettkönig*

Mein Wettprotokoll			
Wurfanzahl	Ich wette auf...	schnellstes Tier	Punkte
1	Schnecke	Igel	0
2	Igel	Frosch, Ameise	0
5	Igel	Igel	1
10	Ameise	Ameise	1
20	Ameise	Schnecke	0
		Gesamtpunktzahl:	2

Abb. 2: *Wettprotokoll für „Wetten auf Sieg"*

ches Tier am Weitesten kommt. Vor dem Start wird festgelegt, wie häufig insgesamt gewürfelt wird. Dann rennen die Tiere los. Diejenigen Kinder, die voraussagen konnten, welches Tier bei der zuvor festgelegten Wurfanzahl am weitesten voran kommt, bekommen einen Punkt. Wettkönig ist, wer am Schluss die meisten Punkte hat.

Mathematischer Gehalt

Um erfolgreich wetten zu können, müssen die Lernenden geeignete Wettstrategien entwickeln. Dies ist der zentrale Anlass zur Untersuchung der beim Zufall auftretenden Muster:

Natürlich ist die rote Ameise durch die ungleichmäßige Farbverteilung auf dem Würfel im Vorteil, daher ist die rote Ameise ein guter Tipp. Gleichwohl ist das Spiel für kleine Wurfanzahlen mit viel Glück verbunden, so dass auch die anderen Tiere gewinnen können. Der gute Tipp ist für kleine Wurfanzahlen also trotzdem nicht sicher! Für größere Wurfanzahlen dagegen schält sich die Ameise als recht sicherer Tipp heraus. Natürlich lassen sich die qualitativen Aussagen zum „nicht sicheren Tipp" und „recht sicheren Tipp" vom höheren Standpunkt aus quantifizieren, z. B. durch Simulationen: Bei Wurfanzahl 5 gewinnt die Ameise mit 53% Wahrscheinlichkeit, bei Wurfanzahl 200 mit 95% (Plaga 2008, S. 21ff), den Kindern allerdings wird das qualitative Urteil über die Sicherheit ausreichen.

Phasen des Lernens am Spiel

In einer *ersten Phase* wird ohne Vorgabe von Wurfanzahlen gespielt, um die Situation zu erfassen. Reihum dürfen die Kinder festlegen, wie lang die Spielrunde ist, also wie häufig gewürfelt wird. In dieser Phase spielen und wetten die Kinder eher intuitiv. Den Übergang zur systematischen Untersuchung der Situation vollziehen viele Kinder nicht automatisch, es muss daher durch geeignete Stufung von Arbeitsaufträgen angeleitet werden.

In der *zweiten Phase* steht die gezieltere Entwicklung einer Wettstrategie im Vordergrund: Die Wurfanzahlen werden systematisch variiert (1-2-5-10-20 Würfe) und die Ergebnisse in einem Wettprotokoll (vgl. *Abb. 2*) schriftlich festgehalten. Die Kinder werden aufgefordert, ihre „Geheimstrategien" aufzuschreiben.

Die Suche nach Gesetzmäßigkeiten wird in einer *dritten Phase* durch die Aufforderung kanalisiert, auch 100 und 1000 Würfe zu betrachten. Da die Langzeiteffekte durch eigenhändiges Würfeln nur mühsam sichtbar werden, wird der Prozess durch eine Computersimulation unterstützt, die das Würfeln hoher Wurfanzahlen übernehmen kann (vgl. *Abb. 3* für das dabei entstehende Excel-Bild).

Nun werden in einer vierten Phase die Ergebnisse zusammengefasst und reflektiert. Dazu nutzen die Schülerinnen und Schüler weitere, übersichtlich angelegte Tabellen, in der die Ergebnisse nicht nur der Tischgruppe, sondern der ganzen Klasse zusammengefasst werden können. Dies ermöglicht eine Rückschau auf alle Spiele: Welches Tier war bei welcher Wurfanzahl am weitesten? Daraus lässt sich nicht nur eine Strategie für gute Wetten („am besten auf die Ameise setzen"), sondern auch für sichereres Wetten ziehen: Welche Wurfanzahl wählst du am besten, um recht sicher zu wetten? Und wieso?

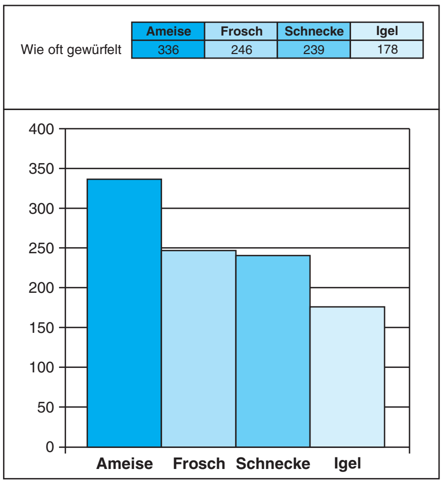

Abb. 3: *Computer hilft beim Würfeln*

Erfahrung I: Kinder abholen bei einem ordinalen Wahrscheinlichkeitskonzept

Zunächst formulieren die Kinder sehr unterschiedliche Strategien (vgl. *Abb. 4*, genauer analysiert in Prediger/Rolka 2008). Einige aktivieren eine tragfähige stochastische Intuition zur Formulierung ihrer Strategien und kommen zu einer Aussage über die Rangfolge der Chancen („Rot hat mehr Chancen als Grün"), wir nennen sie *ordinale Wahrscheinlichkeitsaussage*. Dazu stellen sie wie Moritz (in *Abb. 4*) *theoretische Überlegungen* zur Farbverteilung auf dem Würfel an oder greifen wie Jana auf *empirische Erfahrungen zurück*.

Andere Kinder beziehen ihre Strategien zunächst auch auf *stochastik-fernere Aspekte*, wie Anton mit seiner Wurftechnik oder Leo, der soziale Überlegungen einbezieht.

Wie fast alle Kinder entdeckt auch Leo recht bald die Bedeutung der Farbverteilung auf dem Würfel. Mit dem Wort „Gewinnpotenzial" gibt er seinem ordinal verstandenen Wahrscheinlichkeitskonzept einen Namen, das, wie bei fast allen Kindern, nur auf die Rangfolge zielt: Ein Ereignis ist wahrscheinlicher als ein anderes.

Erst im nächsten Schritt der Unterrichtseinheit wird eine Exaktifizierung dieser Konzepte durch genauere Quantifizierung angestoßen (siehe unten Partnerspiel „Wetten auf Standorte").

Erfahrung 2: Bedeutung der langen und kurzen Sicht

Zunächst jedoch muss die Tragweite der ordinalen Wahrscheinlichkeitsaussage auf den Prüfstand gestellt werden: Was sagt uns das für kleine und große Wurfanzahlen? Wie sollen wir die Wurfanzahlen wählen?

Individuelle Strategien für das Spiel Wetten auf Sieg

Moritz:

Man kukt auf den Würfel und mann nimmt die Meiste Farbe.

Jana:

Ich nimm immer die Ameise weil wenn ich oder
die anderen Würfeln kommt meistens rot raus.

Anton:

Ich habe beim Spieln immer den
Würfel auf einer der Spitzen ~~drech~~ ~~drehen~~ gedreht
dann ist öfters hintereinander die gleiche
Farbe herraus gekommen.

Leo:

Nimals aleine auf einen Stein setzen
bestimtes halten des Würfels

Leo (ein paar Tage später):

Immer auf Ameise Wetten weial höherer
gewinnpotenzjal hat durch anzahl der
Roten-felder auf dem Würfeln.
zb. 7 rote Felder 5 grüne Felder 5 gelbe Felder und
3 blaue Felder
Aber Ameise gewint meistens nur bei höhren
Würflungen z.B 5 bis 100
Unter dieser zahl ist das Gewinnpotenzjal
fast gleich

***Abb. 4:** Individuelle Strategien der Kinder*

Leos Unterscheidung zwischen kleinen und großen Wurfanzahlen (*Abb. 4 unten*) reflektiert seine Erfahrung in der Variation der Wurfanzahlen. Yonca und Karla (in *Abb. 5*) formulieren dies noch ausgefeilter.

Doch wie ist die Tragweite von Wahrscheinlichkeitsaussagen auf kurze Sicht? Lange und kontrovers diskutiert eine Klasse über folgende Aussage (hier vom Videomitschnitt übernommen):

„Wenn ich nur was über große Wurfanzahlen weiß, nützt mir die Information ja für einen einzelnen Wurf gar nichts!“

Eher so?

„Aber bei kleinen Zahlen kann auch der Igel gewinnen, also nutzt mir die Information gar nichts, oder?“

Oder eher so?

„Aber er hat ja Recht, wenn er sagt, dass bei großen Wurfanzahlen der Igel sicher nicht gewinnen wird, und dass bei kleinen Zahlen die Ameise vermutlich gewinnen wird …“

Als tragfähig hat sich folgende Sicht herausgestellt:

Der Tipp auf die Ameise ist für kleine und große Wurfanzahlen die beste Wette, aber eine recht sichere Wette ist der Tipp erst für große Zahlen.

Das Partnerspiel „Wetten auf Standorte“

Spielregeln

Während bei der Spielvariante ‚Wetten auf Sieg‘ lediglich auf die Position des ersten Tieres gewettet werden musste, steigt die Anforderung bei ‚Wetten auf Standorte‘: Bei dieser Variation der Spielregel müssen die genauen Standorte der Tiere vorhergesagt werden, z. B. die Ameise kommt bei 20 Würfen bis zur 9, der Frosch bis zur 3. Dazu spielen die Schülerinnen und Schüler nicht mehr in der Gruppe, sondern zu zweit. Wettpunkte erhält derjenige, der mit seinem Tipp dem tatsächlich gewürfelten Standort am nächsten kommt. Wettkönig ist wieder, wer am Schluss die meisten Punkte hat. Alle anderen Spielregeln werden beibehalten.

Mathematischer Gehalt

In diesem Spiel zeigen sich Muster in den stabilen Verhältnissen der Standorte zueinander: Die relativen Häufigkeiten der gewürfelten Farben sind bei großen Wurfanzahlen gut vorhersagbar! Das sieht man beispielsweise an den beim Spielen entstehenden Standortbildern (wie in *Abb. 3*): Spielt man wiederholt mit hohen Wurfanzahlen, so *verändern sich diese Bilder in der Regel nur wenig*.

Mit dieser Erfahrung ist die Möglichkeit angebahnt, auf der Suche nach einer guten Voraussage das ordinale Wahrscheinlichkeitskonzept zum prognostischen zu erweitern, also *Wahrscheinlichkeiten als Prognosen für die relativen Häufigkeiten* verstehen zu lernen (s. o.), doch erfordert dies weitere Schritte:

An den Zahlenwerten ist die Konstanz der relativen Häufigkeiten am leichtesten bei gleichen Wurfanzahlen zu erfassen. Diese Möglichkeit, die Standorte bei festen Wurfanzahlen zu vergleichen, ist der Hintergrund für die im ersten Spiel ‚Wetten auf Sieg’ bereits gesetzte, dort noch eher irritierende Spielregel, dass die Tiere nicht ein festes Ziel erreichen müssen, sondern eine vorgegebene Zahl an Würfen rennen. Eine Variation der Wurfanzahlen erfordert

Karla:

Bei Etappe 1: „Wetten auf Sieg" kann man bei kleinen Wurfanzahlen nicht sagen wer gewinnt. Aber bei hohen Wurfanzahlen kann man sagen das die Ameise gewinnt, weil sie die meisten Farben auf dem Würfel hat.

Yonca:

Sie meint wenn man nur einmal würfelt kann man diesen einzelnen Wurf nicht vorhersagen, also man weiß nicht ob dieser Wurf jetzt immer richtig ist. Wenn zum Beispiel rot gewinnt weiß man nicht ob man das jetzt immer nimmt. Aber auf langer Sicht, damit meint sie wenn man es länger spielt dann ist es auch nicht mehr so zufällig. Denn man weiß schon ein wenig was passiert.

Ralph:

Sie meint bei kleinen Zahlen hat man den Zufall nicht so gut im Griff aber bei höheren geht es besser weil es dann verteilter geht.

Abb. 5: *Erfahrungen zum Gesetz der großen Zahlen*

darüber hinaus einen Wechsel der Perspektive: *Von absoluten Werten,* die in der Spielvariante ‚Wetten auf Sieg' im Vordergrund stehen, *zu relativen Werten*. Denn bei einem Wechsel der Wurfanzahl müssen die Kinder von einer Wurfanzahl zur nächsten die neuen Standorte ‚hochrechnen'. Liegen die Standortwerte der Schnecke beispielsweise bei 100 Würfen zwischen 35 und 70, so werden sie bei 200 Würfen vermutlich zwischen 70 und 140 liegen. Hier sind – wie bei jedem Konzeptwechsel – Denkhürden im Lernprozess zu erwarten (vgl. Büchter u. a. 2005). Vorerfahrungen im Bereich der Bruchrechnung bzw. dem proportionalen Denken sind daher an dieser Stelle eine wichtige technische Voraussetzung, um die konzeptionelle Denkhürde bewältigen zu können.

Zwar stabilisieren sich auf lange Sicht die relativen Häufigkeiten der Farbe rot bei 7/20, doch selbst bei hohen Wurfanzahlen verschwinden die Schwankungen nicht gänzlich, im Gegenteil: Die absoluten Differenzen werden sogar größer! Gleichwohl lässt sich beobachten, dass die relativen Schwankungen immer kleiner werden, dass also das Intervall von 35 bis 70 bei der Schnecke nicht einfach proportional hochgerechnet werden kann, sondern relativ an der Wurfanzahl kleiner wird. Dieser zweiten zu überwindenden Denkhürde wird in der Spielregel dadurch Rechnung getragen, dass die Abstände der Schätzungen jeweils partnerweise verglichen werden, so dass die absoluten Abweichungen weniger Bedeutung haben.

Auch wenn der Umgang mit relativen und absoluten Häufigkeiten notwendig ist, sind diese in dieser Einheit kein expliziter Lerngegenstand, sondern das Grundverständnis von relativen Häufigkeiten wird zum einen als Voraussetzung betrachtet, und zum anderen ist es integraler Bestandteil des Excel-Computerprogramms (s. o.) und wird automatisch berechnet.

Phasen des Lernens am Spiel

In der *ersten Phase* des Spiels wird (wie schon bei der ersten Spielvariante) ohne Vorgabe von Wurfanzahlen gespielt. Die Schülerinnen und Schüler müssen eine geeignete Wettstrategie finden und formulieren. Diese Phase soll den intuitiven Strategien Raum lassen und den Kindern die Möglichkeit geben, sich der veränderten Spielsituation anzunähern.

Ebenso wie beim „Wetten auf Sieg" ist auch hier die Trennung zwischen Spielsituation und Erkundungsprozess wichtig. Sie ermöglicht es den Schülerinnen und Schülern, sich in der *zweiten Phase* nicht von spielstrategischen Erwägungen ablenken zu lassen, sondern das Spiel systematisch zu untersuchen.

Die Spielsituation hat zudem insofern eine hohe Komplexität, als beim Spielen auf vier Standortwerte gewettet werden muss. Um die Lernenden bei ihren Bemühungen zu entlasten, wird die Komplexität der Forschungsaufträge schrittweise gesteigert:

1. *Untersuche, wo der Frosch bei Versuchen mit einer Wurfanzahl von 200 jeweils landet.*
2. *Betrachte die Standortbilder aller vier Tiere am Computer: Wie sehen sie bei 20, 200, 2000 Würfen aus? Beschreibe, was dir auffällt.*
3. *Schreibe in eine Tabelle deinen Tipp, wo wohl der Frosch bei 20,*

200, 2000 Würfen landet. Schreibe zum Vergleich die tatsächlichen Werte dazu!

4. *Was haben die drei vorherigen Fragen miteinander zu tun?*

Auf diese Weise können Lernende die zentrale Erfahrung, dass bei großen Wurfanzahlen die Häufigkeiten gut voraussagbar sind, in verschiedenen Darstellungsformen machen:

– graphisch als Eindruck von der bei großen Zahlen immer ähnlichen Verteilung auf dem Spielbrett.
– numerisch in den geringen Schwankungen der Anteile.
– in prozentualer Darstellung durch immer ähnlichere prozentuale Häufigkeiten.

Erfahrung 3: Kinder begleiten zu prognostischen Wahrscheinlichkeitskonzepten

Bei der Untersuchung der (numerischen) Standortwerte erkennen die meisten Schülerinnen und Schüler schnell, dass sich die Häufigkeiten relativ zuverlässig in einem bestimmten Bereich bewegen und dieser Bereich einen besseren Orientierungsrahmen zum Schätzen liefert als ein einzelner Wert („zwischen 35 und 70“).

Diese Erfahrungen der Zuverlässigkeit bestimmter Intervalle für die Standortwerte bilden den Ausgangspunkt für die Entwicklung eines prognostischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Dieser wird weiter ausgebaut durch die Untersuchungen der grafischen Darstellungen im zweiten Schritt. Denn an den Diagrammen sieht man deutlich, dass sich die Häufigkeiten auf längere Sicht stabilisieren (vgl. *Abb. 6*).

Während die Diagramme den Blick auf die gesamte Situation zeigen, schärfen die systematischen Untersuchungen der Standortwerte eines einzelnen Tieres den Blick für den proportionalen Zusammenhang, den etwa Mia (in *Abb. 7 oben*) zum Hochrechnen von einem Schritt auf den nächsten nutzt.

Ralph (in *Abb. 7 Mitte,* entnommen Schacht 2007, S. 63) konnte die in der graphischen Darstellung wahrgenommene Konstanz der Bilder auch auf numerischer Ebene wieder finden, indem er die erwartbaren Werte mittels prozentualer Angaben als Grenzen des Schätzintervalls ausdrückt. Mit Hilfe des Impulses zur Untersuchung der prozentualen Häufigkeiten bei zunehmender Wurfan-

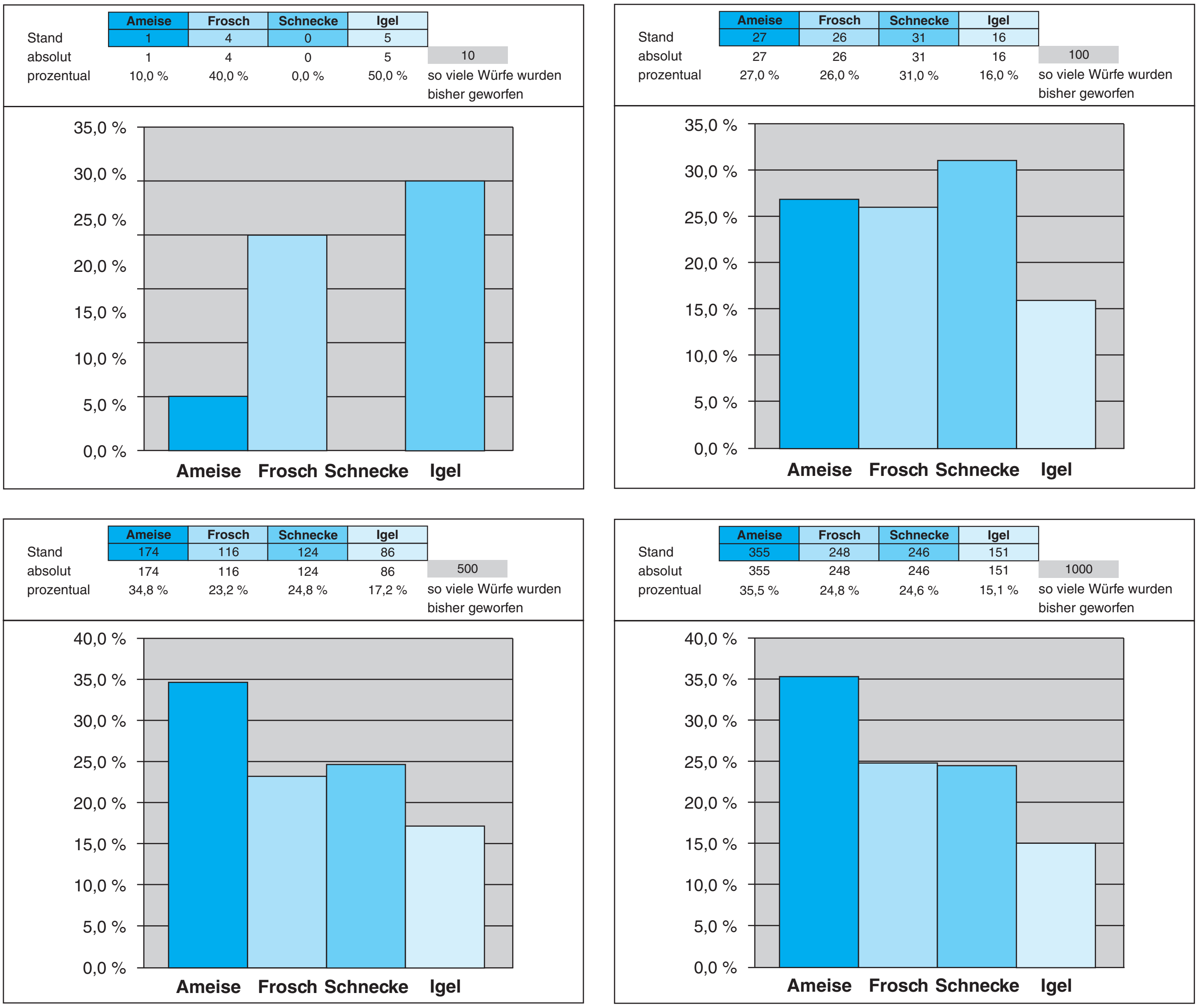

Abb. 6: *Standorte der Tiere (= relative Häufigkeiten) stabilisieren sich bei hohen Werten*

Mia:

Für 200 Würfe

Bei 200 Würfen muss man die Farben der Würfel mal 10 nehmen
(Also 7 · 10 = 70, 5 · 10 = 50, 5 · 10 = 50, 3 · 10 = 30)

Für 400 Würfe

Bei 400 Würfen muss man die Farben des Würfels mal 20 nehmen
(Also 7 · 20 = 140, 5 · 20 = 100, 5 · 20 = 100, 3 · 20 = 60)

Ralph:

Mir ist aufgefallen das Die Ameise Bei der Wurf-zahl 1000 fast immer eine prozent zahl von 20 bis 40, bei Der Wurfzahl 500 war ~~so~~ genau das selbe.

Hanna:

Was passiert mit der prozentualen Häufigkeit wenn ich immer weiter würfel?
Frosch
1500 → 24,8 %
30000 → 25,2 %
45000 → 25,3 %
62000 – 25,3 %
175000 – 25,1 %

Ja, es wird immer so weiter gehen, denn beim Frosch ist es so, der Frosch hat die Farbe grün und grün ist 5 mal auf dem Würfel. Meistens ist es ab höheren Wurfanzahlen so dass 25% dabei heraus kommen. Und wenn man bei Hundert anfängt kommt 25% heraus.

***Abb. 7:** Entdeckungen auf dem Weg zu prognostischen Wahrscheinlichkeitskonzepten*

zahl entdeckt auch Hanna die Stabilisierung und begründet sie in Bezug auf die Farbverteilung des Würfels (in *Abb. 7 unten*).

Auf diesen Wegen bekommt auch das Gesetz der Großen Zahlen eine facettenreiche Bedeutung, die über die ursprüngliche Sicherheit von Wetten hinaus geht.

Fazit

In unserer Erprobung hatte das Spiel nicht nur zu Beginn, sondern während der ganzen Unterrichtseinheit einen hohen Aufforderungscharakter für die Kinder, getragen durch ihre Neugierde und Spielfreude. Viele Kinder waren mit Freude, intensiven Diskussionen und großer Leidenschaft bei der Sache. Das Spielen kann die Kreativität vieler Kinder anregen und sie herausfordern, eigene Überlegungen und Strategien zu entwickeln.

Neben diesen methodischen Aspekten war uns aus fachdidaktischer Sicht wichtig, tragfähige Vorerfahrungen für den Aufbau stochastischer Konzepte der Kinder zu wecken. Sie zeigen sich in ersten Wettstrategien und können in der Spielsituation überprüft und weiter entwickelt werden. Am Ende dieser Einheit steht zwar noch kein aus fachlicher Sicht fertiger Wahrscheinlichkeitsbegriff, aber eine wichtige intuitiv begründete Vorstellung zum Zufall und seinen Gesetzmäßigkeiten.

Anmerkung:

Das Spiel ist im Rahmen des Projekts KOSIMA entstanden (siehe www.kosima.uni-dortmund.de oder www.kosima.ph-freiburg.de). Daher haben wir vielen Beteiligten für ihre konstruktive und hilfreiche Mitarbeit an der Entwicklung zu danken: Unseren KOSIMA-Projektpartnern Bärbel Barzel und Timo Leuders für das Mitdenken in der Entwicklungsphase, dem Cornelsen-Verlag für die Unterstützung, den vier Lehrkräften, Jan Verschraegen, Uli Brauner, Kay Nüßler und Mike Abshagen für die Erprobung in ihren Klassen. Katrin Rolka, Heinz Laakmann und Florian Schacht für die Beobachtung der Erprobung sowie die eingebrachten Schülerprodukte und -äußerungen.

Literatur:

Büchter, Andreas / Hußmann, Stephan / Leuders, Timo / Prediger, Susanne (2005): Den Zufall im Griff? Stochastische Vorstellungen fördern. In: Praxis der Mathematik, 4, S. 1–7.

Hußmann, Stephan (2003): Mathematik entdecken und erforschen – Theorie und Praxis des Selbstlernens in der Sekundarstufe II, Cornelsen, Berlin.

Moore, David S. (1990): Uncertainty. In: Steen, Lynn Arthus (Hrsg.): On the shoulders of giants: New approaches to numeracy. National Academy press, Washington, S. 95–137.

Plaga, Vlado (2008): Ein Spiel des Zufalls – Analyse von Erkundungen stochastischer Prinzipien durch Grundschüler, Wissenschaftliche Hausarbeit, betreut von S. Prediger, Universität Dortmund.

Prediger, Susanne (2005): „Auch will ich Lernprozesse beobachten, um besser Mathematik zu verstehen." Didaktische Rekonstruktion als mathematikdidaktischer Forschungsansatz zur Restrukturierung von Mathematik. In: mathematica didactica, 28 (2), S. 23–47.

Schacht, Florian (2007): Mathematik – Sprache – Fachsprache. Eine empirische Untersuchung zum Thema Sprachentwicklung im Mathematikunterricht, dargestellt an einer Unterrichtseinheit zum Thema Zufall in der fünften Klasse, Wissenschaftliche Hausarbeit, betreut von S. Hußmann, Universität Dortmund.

Prediger, Susanne / Rolka, Katrin (2008): Betting as a pathway to the law of large numbers – Self-construction of strategies for initiating conceptual change. In: Borovncnik, Manfred / Pratt, Dave (Hrsg.) Research and development in the teaching and learning of probability. Proceedings of Topic Study Group 13 at ICME 11, Mexico 2008.

Riemer, Wolfgang (1991): Stochastische Probleme aus elementarer Sicht, BI-Verlag, Wiesbaden.

Prof. Dr. Stephan Hußmann
Prof. Dr. Susanne Prediger
Technische Universität Dortmund
hussmann@math.uni-dortmund.de
prediger@math.uni-dortmund.de