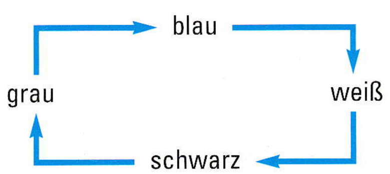
PM Denkzettel

Hinweise zum Spiel

Andreas Büchter

Bei den merkwürdigen Würfeln handelt es sich um „nicht-transitive“ Würfel, d. h. es gibt keinen „besten“ (vgl. Büchter & Henn 2005, S. 215; der „Erfinder“ dieser Würfel ist der Statistiker Bradley Efron von der Stanford University). Egal welchen Würfel der erste Spieler wählt, der zweite Spieler kann immer einen mit höheren Gewinnchancen finden (und zwar jeweils einen mit der Gewinnwahrscheinlichkeit von 2/3 in einem Einzelspiel). Dieses seltsame, äußerst überraschende Phänomen fordert Schülerinnen und Schüler fast zwangsläufig zu einer stochastischen Analyse heraus – und führt damit fast von selbst zu einem „authentischen mathematischen Arbeiten“ (zu diesem Begriff s. Büchter & Leuders 2005). Dabei werden die Schülerinnen und Schüler je nach Vorkenntnis die Gewinnchancen für zwei Würfel bei Spielen gegeneinander bestimmen oder auch mithilfe der Binomialverteilung die Gesamtgewinnwahrscheinlichkeit im Spiel „Merkwürdige Würfel“, das nach dem Prinzip „best of eleven“ gespielt wird, bestimmen. Die Entdeckung des Phänomens der Nicht-Transitivität muss möglicherweise durch eine gezielte Intervention der Lehrperson gefördert werden. Nachdem die Schülerinnen und Schüler hinreichend häufig gespielt und dabei unterschiedliche Würfelwahlen ausprobiert haben, kann man z. B. fragen, ob es einen besseren Würfel als den blauen gibt. Wird der graue Würfel genannt, kann man weiter fragen, ob es einen besseren als den grauen gibt, usw.
Dabei kann das folgende Tafelbild entstehen:



Wenn die Schülerinnen und Schüler andere Vorschläge machen z. B. weil jemand mit dem schwarzen Würfel gegen den blauen gewonnen hat, so sollten diese Vorschläge natürlich mit aufgenommen und visualisiert werden. Der Anreiz, die Situation genauer zu analysieren, bleibt hiervon unberührt. Das oben dargestellte „ideale“ Bild der Nicht-Transitivität entsteht dann nach der detaillierten Analyse. Bei der stochastischen Analyse dieses Phänomens werden die Schülerinnen und Schüler – ggf. je nach vorangehendem Unterricht – häufig mit Baumdiagramm oder Tabellen arbeiten bzw. diese entwickeln. Mit einem Baumdiagramm lässt sich die Situation im Sinne von „Chancen von Chancen“ beschreiben, mit einer Tabelle können alle möglichen „Würfelpaare“ betrachtet werden.
Für den blauen und grauen Würfel könnte dies wie folgt aussehen:

	1	1	1	5	5	5
2	G	G	G	B	B	B
2	G	G	G	B	B	B
2	G	G	G	B	B	B
2	G	G	G	B	B	B
6	G	G	G	G	G	G
6	G	G	G	G	G	G

P(grau gew.) = $^{24}/_{36}$

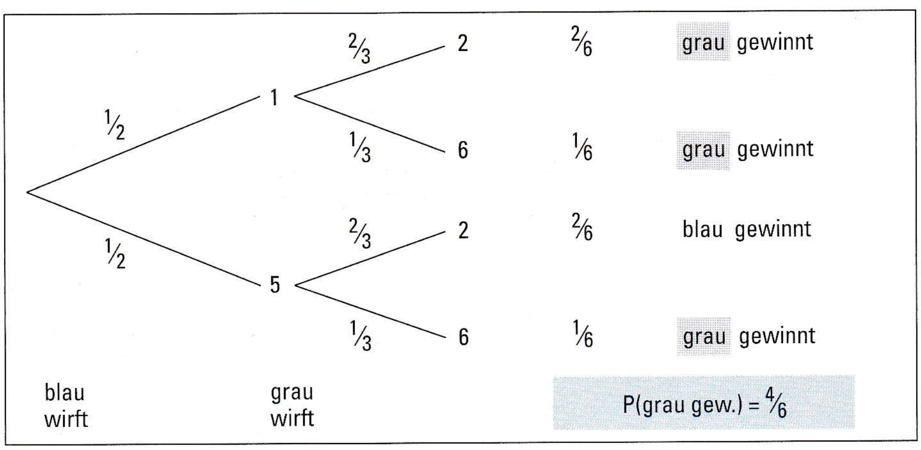
Diese Analyse kann für alle möglichen Würfelpaare durchgeführt werden. Dabei kann auch ein kombinatorischer Nebenschauplatz eröffnet werden:

- Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es eigentlich Würfelpaare aus vier Würfeln zusammenzustellen?
- Was heißt hierbei „unterschiedlich“?

Führt man die Analyse vollständig durch, so kann man die folgende Übersicht aufstellen (gelesen als „Zeile gewinnt gegen Spalte mit der Wahrscheinlichkeit in der entsprechenden Zelle“, also beim grau unterlegten Feld: „blau gewinnt gegen weiß mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/3“)

	B	W	S	G
B	–	⅔	½	⅓
W	⅓	–	⅔	4/9
S	½	⅓	–	⅔
G	⅔	5/9	⅓	–

Schließlich wird in der Regel die Diskussion aufkommen, dass selbst bei einer optimalen Würfelwahl auch einmal etwas schief gehen kann. Selbst wenn man also in elf Einzelspielen mit dem blauen gegen den weißen Würfel antritt, kann der Zufall dafür sorgen, dass man höchstens fünf Mal gewinnt. Mithilfe der binomialverteilten Zufallsgröße X: „Anzahl der gewonnen Einzelspiele für blau“ („mit den Parametern“ $n = 11$; $p = 2/3$) lässt sich berechnen, dass diese Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 5) \approx 12\ \%$ nicht besonders groß ist, dieses Ereignis aber doch voraussichtlich auch einmal in einer Klasse auftreten kann.



Literatur

Büchter, Andreas & Henn, Hans-Wolfgang (2005): Elementare Stochastik. Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls. Springer.

Büchter, Andreas & Leuders, Timo (2005): Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern - Leistung überprüfen. Cornelsen Scriptor.

Andreas Büchter,
Dortmund,
andreas@buechter.net