Grundbegriffe Stochastik I

1 Zufallsexperiment, Ergebnis, Ereignis

1.1 Ergebnis

Es werden Experimente betrachtet, deren Ausgänge nicht vorhergesagt werden können, wie z.B. das Würfeln, das Werfen einer Münze, das Lotto-Spiel oder das Ziehen von Kugeln aus einer Urne.
Die möglichen Ausgänge eines solchen Experiments nennen wir **Ergebnisse**. Alle Ergebnisse werden in der **Ergebnismenge** Ω zusammengefasst.

Beispiel 1.1.1 *Für das Würfeln mit einem Würfel kann* $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ *eine Ergebnismenge sein, aber genauso wären auch* $\Omega = \{6,\ \textit{keine } 6\}$ *oder* $\Omega = \{\textit{gerade Zahl, ungerade Zahl}\}$ *mögliche Ergebnismengen.*

Beispiel 1.1.2 *Für das zweimalige Werfen einer Münze wäre* $\Omega = \{(K,K),(K,Z),(Z,K),(Z,Z)\}$ *eine mögliche Ergebnismenge. Interessiert man sich nur für die Anzahl der „Köpfe", so wäre* $\Omega = \{0,1,2\}$ *auch eine mögliche Ergebnismenge.*

1.2 Zufallsexperiment

Als Zufallsexperiment wird im Folgenden ein Experiment mit einer bestimmten Ergebnismenge Ω *bezeichnet, deren Ergebnisse nicht vorhergesagt werden können.*

1.3 Ereignis

Ein **Ereignis** A *ist eine Zusammenfassung von bestimmten Ergebnissen, also eine Teilmenge der Ergebnismenge* Ω.

Beispiel 1.3.1 *Als Zufallsexperiment wird das Würfeln mit einem Würfel mit der Ergebnismenge* $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ *betrachtet.*

- $A = \{2,4,6\}$; *A ist das Ereignis „Der Würfel zeigt eine gerade Zahl.".*
- $B = \{1,2,3,4\}$; *B ist das Ereignis „Der Würfel zeigt eine Zahl kleiner als* 5*.".*
- $C = \{3\}$; *C ist das Ereignis „Der Würfel zeigt die Zahl* 3*.".*

Beispiel 1.3.2 *Als Zufallsexperiment wird das zweimalige Werfen einer Münze mit der Ergebnismenge* $\Omega = \{(K,K),(K,Z),(Z,K),(Z,Z)\}$ *betrachtet.*

- $A = \{(K,K),(K,Z)\}$; *A ist das Ereignis „Die erste Münze zeigt Kopf.".*
- $B = \{(K,K),(K,Z),(Z,K)\}$; *B ist das Ereignis „Mindestens eine Münze zeigt Kopf.".*

Beispiel 1.3.3 *Bezüglich der Ergebnismenge aus Beispiel 1.3.2 sind* $\{\}$, $\{(K,K)\}$, $\{(K,Z)\}$, $\{(Z,K)\}$, $\{(Z,Z)\}$, $\{(K,K),(K,Z)\}$, $\{(K,K),(Z,Z)\}$, $\{(K,K),(Z,K)\}$, $\{(K,Z),(Z,Z)\}$, $\{(K,Z),(Z,Z)\}$, $\{(Z,K),(Z,Z)\}$, $\{(K,K),(K,Z),(Z,K)\}$, $\{(K,K),(K,Z),(Z,Z)\}$, $\{(K,K),(Z,Z),(Z,K)\}$, $\{(K,Z),(Z,Z),(Z,K)\}$, $\{(K,K),(K,Z),(Z,K),(Z,Z)\}$ *alle möglichen Ereignisse.*

Bemerkung 1.3.4 *Ereignisse können in aufzählender Weise mit Mengenklammern oder in Worten angegeben werden.*

Bemerkung 1.3.5 *Ein* **Ergebnis** *ist ein möglicher Ausgang bei der Durchführung eines Zufallsexperiments. Ein* **Ereignis** A *ist etwas, auf das man setzen könnte, wenn man das Zufallsexperiment als Glückspiel durchführt. Dies kann durchaus mehrere Ergebnisse beeinhalten.*

Bemerkung 1.3.6 *Diejenigen Ereignisse* A*, die aus genau einem Ergebnis bestehen, nennt man* **Elementarereignisse**. *Beim Würfeln mit einem Würfel ist* 6 *ein mögliches Ergebnis, das man würfeln kann, und* $\{6\}$ *ein Elementarereignis, auf das man setzen könnte.*

Bemerkung 1.3.7 *Die leere Menge* $\{\}$ *und die ganze Ergebnismenge* Ω *sind auch Ereignisse, das sogenannte ummögliche Ereignis* $\{\}$ *und das sichere Ereignis* Ω.

1.4 Gegenereinis

Zu jedem Ereignis wird mit $\overline{A}$ **das Gegenereignis zu A** *bezeichnet. Zu* $\overline{A}$ *gehören all diejenigen Ergebnisse, die* **nicht** *zu A gehören.*

Beispiel 1.4.1 *Als Zufallsexperiment wird das Würfeln mit einem Würfel mit der Ergebnismenge* $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ *aus Beispiel 1.3.1 betrachtet.*

- *Das Ereignis* $\overline{A} = \{1,3,5\}$ *("Der Würfel zeigt eine ungerade Zahl.") ist das Gegenereignis zu* $A = \{2,4,6\}$ *(„Der Würfel zeigt eine gerade Zahl.").*
- *Das Ereignis* $\overline{B} = \{5,6\}$ *(„Der Würfel zeigt eine Zahl größer als* 4*.") ist das Gegenereignis zu* $B = \{1,2,3,4\}$ *(„Der Würfel zeigt eine Zahl kleiner als* 5*.").*
- *Das Ereignis* $\overline{C} = \{1,2,4,5,6\}$ *(„Der Würfel zeigt nicht die Zahl 3.") ist das Gegenereignis zu* $C = \{3\}$ *(„Der Würfel zeigt die Zahl* 3*.").*

Beispiel 1.4.2 *Als Zufallsexperiment wird das zweimalige Werfen einer Münze mit der Ergebnismenge* $\Omega = \{(K,K),(K,Z),(Z,K),(Z,Z)\}$ *aus Beispiel 1.3.2 betrachtet.*

- *Das Ereignis* $\overline{A} = \{(Z,Z),(Z,K)\}$ *(„Die erste Münze zeigt Zahl.") ist das Gegenereignis zu* $A = \{(K,K),(K,Z)\}$ *(„Die erste Münze zeigt Kopf.").*
- *Das Ereignis* $\overline{B} = \{(Z,Z)\}$ *(„Beide Münzen zeigen Zahl.") ist das Gegenereignis zu* $B = \{(K,K),(K,Z),(Z,K)\}$ *(„Mindestens eine Münze zeigt Kopf.").*

2 Absolute Häufigkeit, relative Häufigkeit

2.1 Absolute Häufigkeit

Wird ein Zufallsexperiment n mal ausgeführt, so gibt die **absolute Häufigkeit** $H_n(A)$ *des Ereignisses* A *an, wie oft das Ereignis* A *eingetreten ist.*

Beispiel 2.1.1 *Es wird mit zwei Würfeln geworfen und das Ereignis A=„Beide Würfel zeigen die gleiche Zahl" betrachtet. Dieses Experiment wird 80 mal ausgeführt.*
Tritt das Ereignis A *bei den* 80 *Versuchen genau* 14 *mal auf, so gilt* $H_{80}(A) = 14$.

2.2 relative Häufigkeit

Die **relative Häufigkeit** *eines Ereignisses* A *ist definiert als* $h_n(A) = \frac{H_n(A)}{n}$.
Sie gibt an, wie häufig das Ereignis A *eintritt, bezogen auf die Anzahl der Versuche.*

Beispiel 2.2.1 *Für das obere Beispiel gilt:* $h_n(A) = \frac{H_n(A)}{n} = \frac{14}{80} = 0{,}175 = 17{,}5\%$.

Bemerkung 2.2.2 *Für die relative Häufigkeit* $h_n(A)$ *gilt* $0 \leq h_n(A) \leq 1$.

Bemerkung 2.2.3 *Der Index* n *kann bei* $H_n(A)$ *bzw.* $h_n(A)$ *auch weggelassen werden. Er verdeutlicht aber, dass diesen Werten eine bestimme Anzahl von Versuchen zu Grunde liegt.*

3 Wahrscheinlichkeit, Laplace-Experimente

3.1 Schnitte und Vereinigungen von Ereignissen

$A \cap B = \{x \in \Omega : x \in A \quad und \quad x \in B\}$

Zu $A \cap B$ *gehören all diejenigen Ergebnisse, die sowohl zu A als auch zu B gehören.*

$A \cup B = \{x \in \Omega : x \in A \quad oder \quad x \in B\}$

Zu $A \cup B$ *gehören all diejenigen Ergebnisse, die zu A oder zu B gehören.*

3.2 Wahrscheinlichkeit p

Jedem Ereignis A *wird eine* **Wahrscheinlichkeit** $p(A)$ *mit den folgenden Eigenschaften zugeordnet. (Axiome von Kolmogorov)*

- $P(\{\}) = 0$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, *falls* $A \cap B = \{\}$ *(*A *und* B *haben keine gemeinsamen Ergebnisse.)*

Bemerkung 3.2.1 *Für jedes Ereignis A gilt $0 \leq P(A) \leq 1$.*

Bemerkung 3.2.2 *Aus den Bedingungen in 3.2 folgt $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.*

Bemerkung 3.2.3 *Die Zuordnung, die jedem Ereignis A eine Wahrscheinlichkeit $P(A)$ zuordnet, nennt man* **Wahrscheinlichkeitsverteilung**.

Bemerkung 3.2.4 *Die Wahrscheinlichkeit $p(A)$ ist ein Wert, der sich nur aus theoretischen Überlegungen ergibt. Er ist unabhängig von einer bestimmten Anzahl von Experimenten.*

3.3 Laplace-Experimente

Wählt man ein Zufallsexperiment und eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, so dass alle Elementarereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit p haben, so spricht man von einer **Laplace-Wahrscheinlichkeit**.

In diesem Fall gilt für jedes Ereignis A

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\textit{Anzahl der Ergebnisse in A}}{\textit{Anzahl aller Ergebnisse}} = \frac{\textit{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\textit{Anzahl aller Ergebnisse}}.$$

Kann man zur Mathematisierung eines Experiments eine Ergebnismenge Ω und eine Wahrscheinlichkeit p wählen, so dass alle Elementarereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, so spricht man von einem **Laplace-Experiment**.

Beispiel 3.3.1 *Als Zufallsexperiment wird das Würfeln mit einem „fairen" Würfel mit der Ergebnismenge $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ betrachtet und jedem der 6 Ergebnisse die Laplace-Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ zugeordnet. Dann gilt*

- $P(\{2,4,6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. *Die Wahrscheinlichkeit dafür, eine gerade Zahl zu würfeln, beträgt $\frac{1}{2}$.*
- $P(\{5,6\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. *Die Wahrscheinlichkeit dafür, eine Zahl größer als 4 zu würfeln, beträgt $\frac{1}{3}$.*

Beispiel 3.3.2 *Als Zufallsexperiment wird das zweimalige Werfen einer „fairen" Münze mit der Ergebnismenge $\Omega = \{(K,K),(K,Z),(Z,K),(Z,Z)\}$ betrachtet und jedem der 4 Ergebnisse die Laplace-Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ zugeordnet.*

- $P(\{(Z,K),(K,Z)\}) = \frac{1}{2}$. *Die Wahrscheinlichkeit dafür, jede Seite genau einmal zu werfen, beträgt $\frac{1}{2}$.*
- $P(\{(Z,K),(K,Z),\{(Z,Z)\}) = \frac{3}{4}$. *Die Wahrscheinlichkeit dafür, nicht zweimal Kopf zu werfen, beträgt $\frac{3}{4}$.*

Beispiel 3.3.3 *Betrachtet man beim zweifachen Münzwurf die Anzahl der „Köpfe" und wählt* $\Omega = \{0, 1,2\}$ *, so ist es nicht sinnvoll, eine Laplace-Wahrscheinlichkeit zu wählen. Wählt man stattdessen* $p(\{0\}) = \frac{1}{4}$*,* $p(\{1\}) = \frac{1}{2}$ *und* $p(\{2\}) = \frac{1}{4}$*, so handelt es sich nicht um ein Laplace-Experiment.*

4 Das empirische Gesetz der großen Zahlen

Wird ein Zufallsexperiment n-mal ausgeführt und dabei ein Ereignis A *betrachtet, so gilt fast immer für eine sehr große Anzahl von Experimenten:* $h_n(A) \to P(A)$

Das empirische Gesetz der großen Zahlen besagt, dass die relative Häufigkeit $h_n(A)$ *eines Ereignisses* A *mit zunehmender Anzahl von Experimenten im Allgemeinen gegen den theoretischen Wert der Wahrscheinlichkeit* $p(A)$ *strebt. Es gibt auch Ausnahmen, diese werden jedoch für eine größer werdende Anzahl von Experimenten immer seltener.*

5 Baumdiagramme, Pfadregeln

5.1 Baumdiagramme

Beispiel 5.1.1 *In einer Urne befinden sich 3 weiße und 2 schwarze Kugeln. Es werden 2 Kugeln* **ohne Zurücklegen** *gezogen. Man stellt sich die Kugeln nummeriert vor, betrachtet die Ergebnismenge*

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(w_1,w_2), (w_1,w_3), (w_1,s_1), (w_1,s_2), (w_2,w_1), (w_2,w_3), (w_2,s_1),\\ &\quad (w_2,s_2), (w_3,w_1),(w_3,w_2), (w_3,s_1), (w_3,s_2), (s_1,w_1), (s_1,w_2),\\ &\quad (s_1,w_3), (s_1,s_2), (s_2,w_1), (s_2,w_2), (s_2,w_3), (s_2,s_1)\}\end{aligned}$$

und die entsprechende Laplace-Wahrscheinlichkeit.

Für die Ereignisse

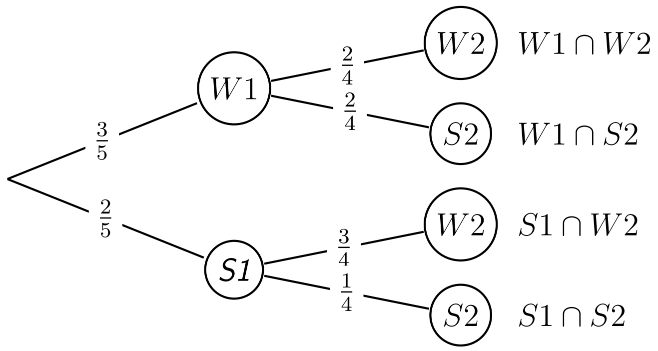
A: „Beide Kugeln sind schwarz." und
B: „Die gezogenen Kugeln haben verschiedene Farben." gilt dann

$$\begin{aligned}A &= \{(s_1,s_2), (s_2,s_1)\}\\ B &= \{(w_1,s_1), (w_1,s_2), (w_2,s_1),(w_2,s_2), (w_3,s_1), (w_3,s_2),\\ &\quad (s_1,w_1), (s_1,w_2), (s_1,w_3), (s_2,w_1), (s_2,w_2), (s_2,w_3)\}.\end{aligned}$$

Da es sich um eine Laplace-Experiment handelt, gilt $P(A) = \frac{2}{20}$ *und* $P(B) = \frac{12}{20}$.

Die Situation kann auch in einem „vereinfachten" Baumdiagramm dargestellt werden, in dem nur die Farben der Kugeln berücksichtigt werden.

$W1$ ist das Ereignis „Die erste gezogene Kugel ist weiß.“,
$S1$ ist das Ereignis „Die erste gezogene Kugel ist schwarz.“,
$W2$ ist das Ereignis „Die zweite gezogene Kugel ist weiß.“,
$S2$ ist das Ereignis „Die zweite gezogene Kugel ist schwarz.“.



Ein Weg vom Anfang eines Baumdiagramms bis zum Ende wird als **Pfad** *bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeiten an den Zweigen des Baumdiagramms heißen* **Zweigwahrscheinlichkeiten**.

5.2 Pfadregel 1: Multiplikationssatz

An Beispiel 5.1.1 erkennt man

$$P(S1 \cap S2) = P(A) = \frac{2}{20} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}.$$

Das Ereignis „Beide Kugeln sind schwarz“ besteht aus einem Pfad durch das Baumdiagramm. An den entsprechenden Zweigen stehen die Wahrscheinlichkeiten $\frac{2}{5}$ und $\frac{1}{4}$, deren Produkt gerade $\frac{2}{20}$ ergibt. Diese Eigenschaft lässt sich in der folgenden Regel ausdrücken:

5.2.1 Multiplikationssatz

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines **Pfades** *werden die einzelnen* **Zweigwahrscheinlichkeiten** *miteinander* **multipliziert**.

5.3 Pfadregel 2: Additionssatz

An Beispiel 5.1.1 erkennt man ebenso

$$P((S1 \cap W2) \cup (W1 \cap S2)) = P(B) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}.$$

Die Summe der Pfadwahrscheinlichkeiten ergibt genau $\frac{12}{20}$. Diese Eigenschaft lässt sich in der folgenden Regel ausdrücken:

5.3.1 Pfadregel 2: Additionsssatz

Gehören zu einem Ereignis A mehrere Pfade, so erhält man die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, indem die einzelnen **Pfadwahrscheinlichkeiten addiert** *werden.*

6 Übungsaufgaben

6.1 Ergebnisse

Aufgabe 6.1.1 *Geben Sie eine Ergebnismenge Ω für das Würfeln mit zwei Würfeln an.*

6.2 Ereignisse

Aufgabe 6.2.1 *Als Zufallsexperiment wird das Würfeln mit einem Würfel mit der Ergebnismenge $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ betrachtet. Geben Sie die folgenden Ereignisse in aufzählender Weise an.*

- *„Es wird eine ungerade Zahl gewürfelt.“*
- *„Es wird eine Primzahl gewürfelt.“*
- *„Es wird eine Zahl gewürfelt, die durch 3 teilbar ist.“*

Aufgabe 6.2.2 *Als Zufallsexperiment wird das zweimalige Werfen eines Würfels mit der Ergebnismenge $\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),...,(6,6)\}$ betrachtet. Geben Sie die folgenden Ereignisse in aufzählender Weise an.*

- *„Der erste Wurf ist eine 6.“*
- *„Die Summe der Augenzahlen ist eine 8.“*
- *„Das Produkt der Augenzahlen ist ungerade.“*

6.3 Häufigkeit

Aufgabe 6.3.1 *Nehmen Sie eine Messreihe von 100 Experimenten für das Würfeln mit zwei Würfeln auf. Erstellen Sie anschließend Tabellen mit den absoluten und relativen Häufigkeiten für die Augensumme und das Augenprodukt. Simulieren Sie die Situation mit Hilfe einer Tabellenkalkulation für eine sehr große Anzahl n von Experimenten.*

6.4 Wahrscheinlichkeit

Aufgabe 6.4.1 *Betrachten Sie das Würfeln mit einem Würfel mit der Ergebnismenge $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ und die Ereignisse A :„Die Augenzahl ist eine gerade Zahl.“ und B : „Die Augenzahl ist größer als 3.“. Geben Sie die Ereignisse $A, B, A\cup B, A\cap B, \overline{A}, \overline{B}, \overline{A\cup B}, \overline{A\cap B}$ in aufzählender Weise an und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse.*

Aufgabe 6.4.2 *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim Würfeln mit drei Würfeln mindestens eine 6 gewürfelt wird.*

Aufgabe 6.4.3 *In einer Urne befinden sich 5 blaue, 4 rote und eine gelbe Kugel. Es werden 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A: „Es wird keine blaue Kugel gezogen.“ und B: „Die gezogenen Kugeln haben verschiedene Farben.“.*

7 Lösungen zu den Übungsaufgaben

7.1 Ergebnisse

7.1.1 Lösung zu 6.1.1

$$\begin{aligned}\Omega \; = \; \{\, & (1{,}1),(1{,}2),(1{,}3),(1{,}4),(1{,}5),(1{,}6),(2{,}1),(2{,}2),(2{,}3),(2{,}4),(2{,}5),(2{,}6),\\ & (3{,}1),(3{,}2),(3{,}3),(3{,}4),(3{,}5),(3{,}6),(4{,}1),(4{,}2),(4{,}3),(4{,}4),(4{,}5),(4{,}6),\\ & (5{,}1),(5{,}2),(5{,}3),(5{,}4),(5{,}5),(5{,}6),(6{,}1),(6{,}2),(6{,}3),(6{,}4),(6{,}5),(6{,}6)\}\end{aligned}$$

7.2 Ereignisse

7.2.1 Lösung zu 6.2.1

- *„Es wird eine ungerade Zahl gewürfelt." ;* $A = \{1{,}3{,}5\}$
- *„Es wird eine Primzahl gewürfelt.";* $B = \{2{,}3{,}5\}$
- *„Es wird eine Zahl gewürfelt, die durch 3 teilbar ist.";* $C = \{3{,}6\}$

7.2.2 Lösung zu 6.2.2

- *„Der erste Wurf ist eine 6.";* $A = \{\,(6{,}1),(6{,}2),(6{,}3),(6{,}4),(6{,}5),(6{,}6)\,\}$
- *„Die Summe der Augenzahlen ist eine 8.";* $B = \{\,(2{,}6),(3{,}5),(4{,}4),(5{,}3),(6{,}2)\,\}$
- *„Das Produkt der Augenzahlen ist ungerade.";*
  $C = \{\,(1{,}1),(1{,}3),(1{,}5),(3{,}1),(3{,}3),(3{,}5),(5{,}1),(5{,}3),(5{,}5)\}$

7.3 Häufigkeit

7.3.1 Lösung zu 6.3.1

An den Versuchen und der Simulation mit Hilfe einer Tabellenkalkulation erkennt man, dass die Werte von Häufigkeit $h_n(A)$ stark schwanken und sich erst für große Werte von n stabilisieren.

7.4 Wahrscheinlichkeit

7.4.1 Lösung zu 6.4.1

$A = \{\,2{,}4{,}6\,\}$, $B = \{4,5,6\}$, $A \cup B = \{\,2{,}4{,}5{,}6\,\}$, $A \cap B = \{\,4,6\,\}$, $\overline{A} = \{\,1{,}3{,}5\,\}$
$\overline{B} = \{\,1,2,3\,\}$, $\overline{A \cup B} = \{\,1{,}3\,\} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \{\,1{,}2{,}3{,}5\,\} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$P(A) = \frac{3}{6}$, $P(B) = \frac{3}{6}$, $P(A \cup B) = \frac{4}{6}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{6}$, $P(\overline{A}) = \frac{3}{6}$, $P(\overline{B}) = \frac{3}{6}$,
$P(\overline{A \cup B}) = \frac{2}{6}$, $P(\overline{A \cap B}) = \frac{4}{6}$

7.5 Ereignisse

7.5.1 Lösung zu 6.4.2

Das Gegenereignis zu dem Ereignis „Es wird mindestens eine 6 gewürfelt." lautet „Es wird keine 6 gewürfelt." Wählt man eine Ergebnismenge mit 216 Ergebnissen, die z.B. die Form $(2{,}5{,}6)$ haben, so gibt es $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ Ergebnisse, in denen keine 6 vorkommt. Es folgt $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} \approx 0{,}42 = 42\%$.

7.5.2 Lösung zu 6.4.3

Mit Hilfe eines Baumdiagramms ergibt sich $P(A) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$ und

$P(B) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{58}{90} = \frac{29}{45}$.